nov 30-13:01

2 av 6

Ledning för uppgift c) på INL

Genom uppgift b) ska vi ha hittat k och ω. Vi känner också

$t_0, t_1, \ldots, t_{20}$

$t_n = n \cdot \Delta t, \; n = 0, \ldots, 20$

Det återstår att finna I, U, ϕ och ψ.

nov 30-13:01

Det ser inte
ut att vara
linjärt.

$Ie^{-kt}\sin(\omega t+\phi) = i(t)$

Använd additions-
satsen på
$\sin(\omega t+\phi)$

nov 30-13:01

$$\sin(\omega t+\phi)=$$

$$\sin(\omega t)\cdot\cos\phi$$

$$+\cos(\omega t)\cdot\sin\phi$$

Nu känner vi till

$$e^{-kt}\sin(\omega t)$$

och

$$e^{-kt}\cos(\omega t)$$

nov 30-13:01

för $t = t_0, t_1, \ldots, t_{20}$

Koefficienterna är

$I\cos\phi$ och $I\sin\phi$

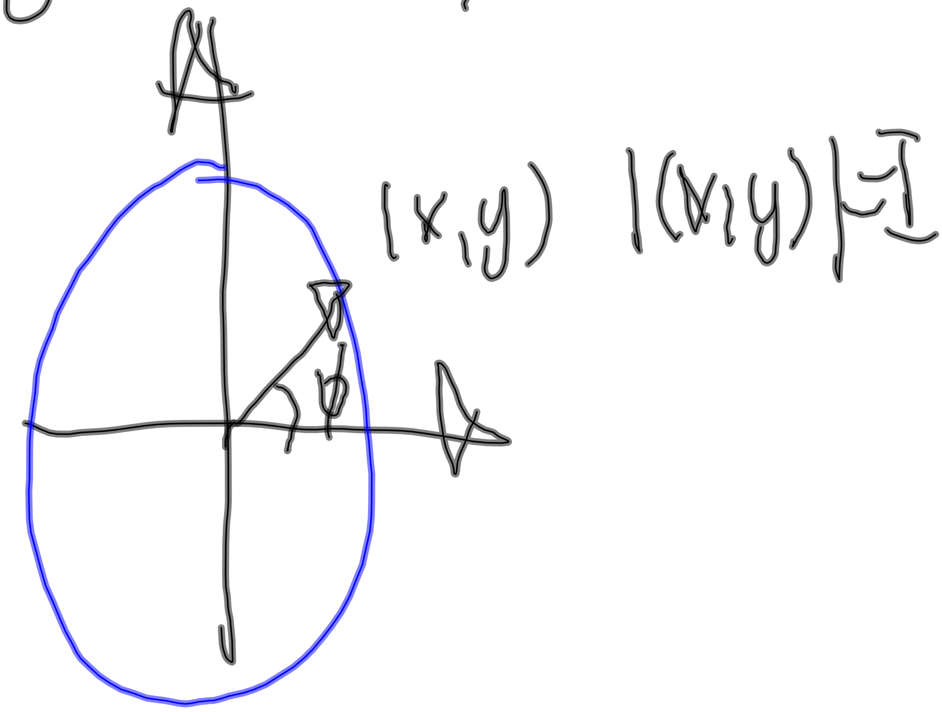
$e^{-kt}\cos\omega t$

$e^{-kt}\sin\omega t$

nov 30-13:01

Om vi med minsta-kvadratmetoden hittar

$$\begin{cases} x = I\cos\phi \\ y = I\sin\phi \end{cases}$$



nov 30-13:01

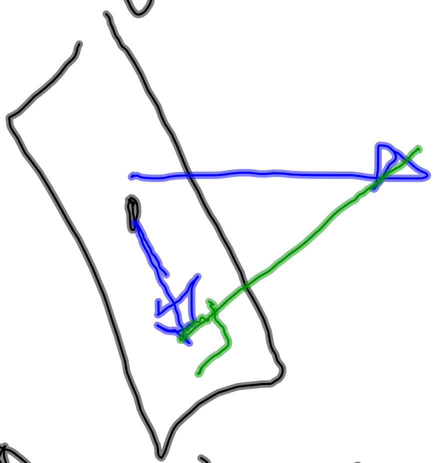
Problemet blir linjärt i rätt koordinater, dvs i $(I\cos\phi, I\sin\phi)$.

nov 30-13:25

Egenvektorer

Finns det fler exempel?

- Projektion på plan

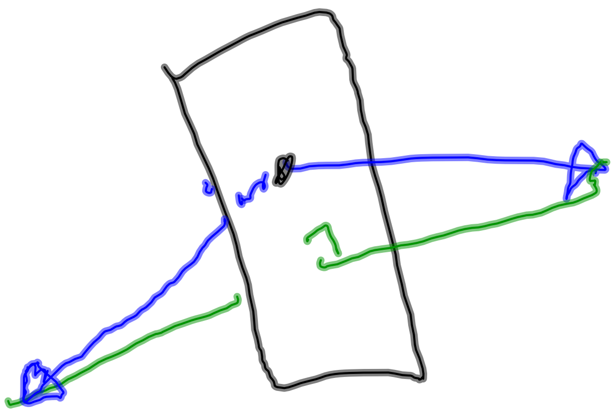


- De vektorer som ligger i planet avbildas på sig själva.

nov 30-13:26

∘ normalvektorer till planet avbildas på nollvektorn som är parallell med normalen.

Spegling i plan



∘ vektor i planet avbildas på sig själva.

nov 30-13:32

- de som är vinkelräta mot planet, dvs normalvektorer till planet, avbildas på −1 ggr sig själva.

nov 30-13:35

- Rotation i planet

– inga vektorer avbildas på multipler av sig själva om $\theta \neq 0°$ och $\theta \neq 180°$.

Vid $\theta = 180°$ avbildas <u>alla</u> vektorer på −1 ggr sig själva.

nov 30-13:36

Om $\theta = 0^\circ$ avbildas

alla vektorer på

sig själv.

nov 30-13:39

Egenvärden

De tal som dyker upp i

$$T(\bar{u}) = a\bar{u}$$

för något $\bar{u} \neq 0$, kallas **egenvärden**

nov 30-13:41

Om $\bar{u}$ är en egenvektor med egenvärde a

så är

- $b\bar{u}$ också det

för alla $b \neq 0$.

nov 30-13:44

Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är två egenvektorer med <u>samma</u> egenvärde a.

Då är $\bar{u}+\bar{v}$ och så det.

nov 30-13:44

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u})+T(\bar{v})$$

$$= a\bar{u} + a\bar{v}$$

$$= a(\bar{u}+\bar{v})$$

Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är linjärt oberoende, dvs inte parallella, så spänner de upp

nov 30-13:45

ett helt plan av
egenvektorer.

nov 30-13:46

Identitets-
avbildningen

$$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

med matris

I. Här är <u>alla</u>

vektorer egen-

nov 30-14:04

vektorer med
egenvärde $\underline{1}$.

Om vi ser på

λI

så har den samma
egenvektorer, dvs
alla vektorer i $\mathbb{R}^n$
men egenvärdet är nu?

nov 30-14:05

Enkla fall

Diagonalmatris;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hypotes; alla.

Testa; $(1,1,1)^t$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \not\parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nov 30-14:07

Alltså är $(1,1,1)^t$ inte en egenvektor.

<u>Hypotes 2</u>: Standardbasvektorerna, dvs $(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t$

<u>Testa</u>:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egenvektor med egenvärde 2.

nov 30-14:09

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egenvektor med egenvärde 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dvs egenvektor med egenvärde 3.

nov 30-14:11

I allmänhet är standardbasvektorerna egenvektorer till diagonalmatriser med egenvärde som är motsvarande element från diagonalen.

nov 30-14:13

Att hitta egen-
värden

$\Longleftrightarrow$

kunna lösa
den karaktäristiska
ekvationen

nov 30-14:15

Determinanten till koefficient-matrisen måste vara noll för att det ska finnas icke-triviala lösningar.

nov 30-14:17

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$A\bar{x} = a\bar{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 4 & 3-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nov 30-14:19

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2x_2 = a x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = a x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1-a)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + (3-a)x_2 = 0 \end{cases}$$

Mer allmänt:

$$A\bar{x} = aI\bar{x}$$

nov 30-14:20

och

$$A\bar{x} = a\bar{x}$$

$$\iff$$

$$A\bar{x} - aI\bar{x} = 0$$

$$\iff$$

$$(A - aI)\bar{x} = 0$$

nov 30-14:21

Om $(A-aI)$ är inverterbar kan vi multiplicera med $(A-aI)^{-1}$ och får $X=0$.

Alltså får inte $A-aI$ vara

nov 30-14:22

inverterbar om

a ska vara ett

egenvärde

nov 30-14:23

Att

$\det(A - aI) = 0$

$\Longleftrightarrow$

a är en rot till ekvationen

$\det(A - xI) = 0$

nov 30-14:24

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) =$$

$$(1-x)(3-x) - 2 \cdot 4$$

nov 30-14:25

$$= 3 - 3x - x + x^2 - 8$$

$$= x^2 - 4x - 5$$

Alltså blir den karaktäristiska ekvationen;

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

nov 30-14:26

I allmänhet får vi en polynom-ekvation av grad n om A är en nxn-matris.

nov 30-14:28

Vad händer om vi får komplexa rötter?

<u>Ex:</u> Rotation med $\theta \neq 0^\circ, \theta \neq 180^\circ$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

nov 30-14:30

Den karakteristiska ekvationen blir

$$\det(A - xI) = 0$$

dvs

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - x \end{pmatrix} = 0$$

nov 30-14:32

$$(\cos\theta - x)^2 - (-\sin\theta)\sin\theta = 0$$

$$\iff$$

$$(\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\iff$$

$$x^2 - 2\cos\theta\, x + 1 = 0$$

nov 30-14:32

Det finns
reella rötter
bara om

$\sin\theta = \cos\theta - x = 0$

dvs om

$\theta = 0^\circ \quad (x = 1)$

eller

$\theta = 180^\circ \quad (x = -1)$

nov 30-14:35

Om determinanten

till $A - aI$

är noll finns

icketriviala

lösningar till

$(A - aI)\bar{x} = 0$

nov 30-14:36

Alltså finns egenvektorer.

Ex:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ger

nov 30-14:38

totalmatris för

$A - 1 \cdot I$ som

$$
\frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

fria

bunden

nov 30-14:39

Vi får

$$\begin{cases} x = -y-z \\ \quad = -s-t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

nov 30-14:41

Alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De två egenvektorerna spänner ett plan av

nov 30-14:41

egenvektorer.

Vi kan hitta normalen genom kryssprodukten

$(-1,1,0) \times (-1,0,1)$

$= (1\cdot 1 - 0\cdot 0,\ 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1,$

$(-1)\cdot 0 - 1\cdot(-1)) = (1,1,1)$

nov 30-14:42

Alltså ges ekvationen till planet av

$$x+y+z=0$$

nov 30-14:44